3.3 비선형 시스템의 선형화

제어 시스템의 대상이 되는 실제 시스템들 중에는 비선형의 특성을 갖는 시스템들이 많이 있다. 엄밀히 말하면, 선형 특성을 갖는 시스템들 보다는 비선형 특성을 갖는 시스템들이 더 많다고 할 수 있다. 그러나, 비선형 시스템에 관한 이론들은 선형 시스템 이론 보다 훨씬 더 복잡하며, 선형 시스템 이론 만큼 잘 정립되어 있지 못하다. 비선형 시스템의 종류는 너무나 다양하기 때문에, 이렇게 다양한 종류들을 모두 다룰 수 있는 이론을 정립하는 것은 거의 불가능에 가깝다. 한편, 선형 시스템에 관한 이론들은 비교적 잘 정리되어 있으며, 비교적 다루기도 쉽다. 따라서, 비선형 시스템에 관한 해석이나 설계의 방법들 중에는 비선형 시스템을 근사화(approximation)하여 선형 시스템으로 변환 후, 선형 시스템에 관한 이론을 적용하는 것이 가장 일반적인 방법이다. 물론 이러한 방법으로 모든 종류의 비선형 시스템을 다룰 수는 없지만, 비교적 많은 종류의 비선형 시스템에 관한 문제를 해결하는 것이 가능하다. 이 절에서는 비선형 시스템을 선형화 하는 방법에 대해서 설명한다.

변수가 하나인 선형 함수의 형태는 다음 식과 같다.

$$y = Kx \tag{0.1}$$

즉, 선형 함수는 그림 3.9와 같이 원점을 지나는 직선으로 나타낼 수 있는 함수를 말한다. 직선이라고 하여도 원점을 지나지 않는 함수는 선형 함수가 아니다.

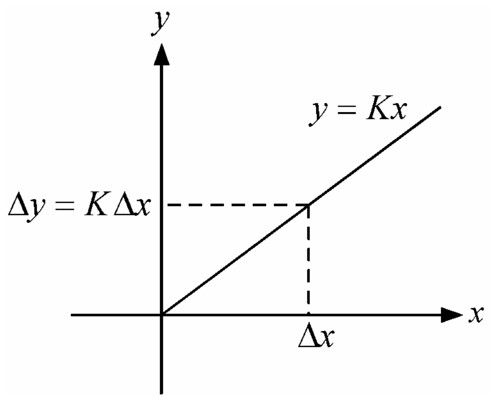

그림 3.9 선형 함수

다음 식과 같은 비선형 함수를 근사화 하여 선형 함수로 바꾸는 과정을 고려해 본다.

$$y = f(x) \tag{0.2}$$

비선형 함수를 선형화 하기 위해서 먼저 결정해야 할 것은 선형화를 하기 위한 중심점의 좌표이다. 예를 들어서, 선형화의 중심점은 x_0 이며,

$$y_0 = f\left(x_0\right) \tag{0.3}$$

의 관계가 만족된다고 가정 한다. 이점으로부터 x 를 Δx 만큼 변화 시켰을 때의 y 의 근사값은 다음 식과 같이 얻을 수 있다.

$$y = f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot \Delta x = f\left(x_0\right) + K \cdot \Delta x = y_0 + \Delta y \tag{0.4}$$

위 식에서의 근사값을 얻는 개념을 그림으로 나타내면 그림 3.10과 같다.

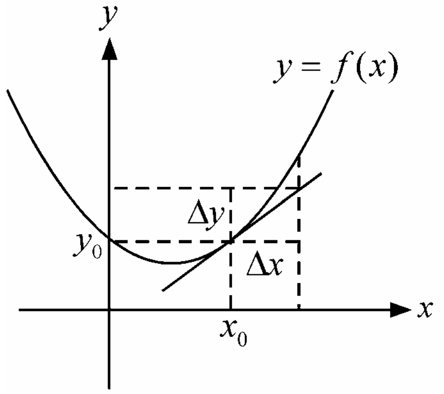

그림 3.10 비선형 함수

위의 그림에서 보면 $x = x_0 + \Delta x$ 에서의 y 의 근사값을 구하기 위해서, 함수를 미분하여 $x = x_0$ 에서의 접선의 기울기를 구한 후, 이를 이용하여 다음과 같이 변화 량의 근사값 Δy 값을 구한다.

$$\Delta y = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot \Delta x = K \cdot \Delta x \tag{0.5}$$

물론, 그림에서 볼 수 있듯이, 정확한 값인 $f\left(x_0 + \Delta x\right)$ 와 근사값인 $y_0 + \Delta y$ 사이에는 오차가 있겠지만, Δx 값이 아주 작다면 이 오차는 무시할 수 있다고 가정한다. 따라서, Δx 와 Δy 의 관계식은 선형함수로 나타낼 수 있게 되는 것이다. 이 선형화의 과정에서 주의해야 하는 사실은 세가지 이다. 첫째, 선형화의 중심 좌표가 바뀌면 기울기는 새롭게 구해야 한다. 즉 선형화된 함수는 중심점 값에 따라 바뀐다는 의미이다. 두번째, Δx 값이 커지면 오차가 커지므로 선형화된 함수를 계속해서 사용할 경우 이로 인한 오차가 발생할 수 있다. 세번째, 비선형 함수는 선형화 하려는 중심점에서 미분 가능해야 한다. 이와 같은 선형화 방법의 대표적인 예는 전자회로의 해석에 사용되는 작은 신호 모델(small signal model)이다. 전자회로에 사용되는 트랜지스터는 비선형 특성을 가지지만, 선형 회로 해석 방법을 적용하기 위해서는 선형화할 필요가 있다. 선형화를 위해서 먼저 바이어스 전압으로부터 동작점(operating point)을 구한다. 이 점이 선형화를 위한 중심점이다. 이 동작점으로부터 전압이나 전류값이 많이 변화하지 않는 다는 가정하에, 전압이나 전류의 변화 량만을 이용해서 선형 회로 모델을 만든 것이 작은 신호 모델인 것이다.

다음으로, 변수가 두개인 2차원 선형 함수를 고려해 본다. 변수가 두개인 선형 함수는 다

음 식과 같이, 변수와 계수가 모두 벡터 형태를 갖는다.

$$y = K_1 x_1 + K_2 x_2 = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{0.6}$$

위의 방정식은 3차원 공간에서의 평면의 방정식이며, 이를 그림으로 나타내면 그림 3.11과 같다.

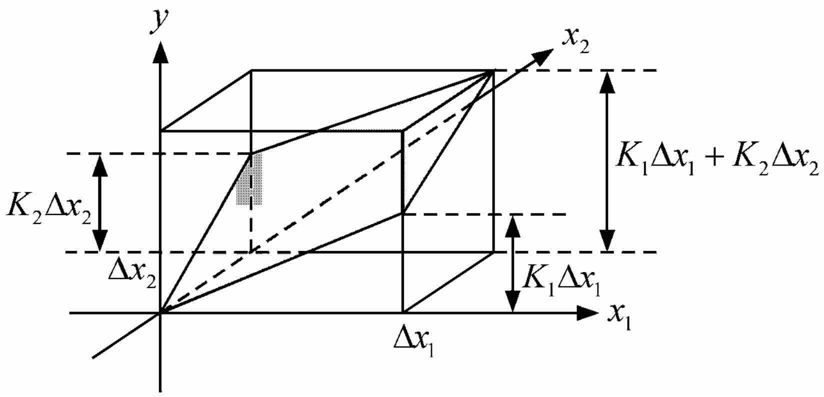

그림 3.11 2차원 선형 함수

그림 3.11에서 볼 수 있듯이, 1차원 선형 함수는 기울기가 한 개이지만, 2차원 선형 함수는 K_1과 K_2 두 개의 기울기가 있다. K_1은 $x_1 - y$ 평면에서의 기울기 이고, K_2는 $x_2 - y$ 평면에서의 기울기 이다. 다음 식과 같은 2차원 비선형 방정식의 선형화를 고려해 본다.

$$y = f\left(x_1, x_2\right) \tag{0.7}$$

위와 같은 2차원 비선형 함수는 x_1 축, x_2 축, y 축으로 이루어진 3차원 공간에서의 곡면 (surface)이다. 선형화의 중심점은 $\left(x_{10}, x_{20}\right)$ 이며,

$$y_0 = f\left(x_{10}, x_{20}\right) \tag{0.8}$$

의 관계가 만족된다고 가정한다. 이 중심점으로부터 x_1은 Δx_1, x_2는 Δx_2를 변화 시켰을 때 y의 근사값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} y &= f\left(x_{10} + \Delta x_1, x_{20} + \Delta x_2\right) \\ &\approx f\left(x_{10}, x_{20}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}} \cdot \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}} \cdot \Delta x_2 \\ &= f\left(x_{10}, x_{20}\right) + K_1 \cdot \Delta x_1 + K_2 \cdot \Delta x_2 = y_0 + \Delta y \end{aligned} \tag{0.9}$$

위의 식에서 편미분 $\partial f / \partial x_1$은 비선형 곡면이 $x_1 - y$ 면과 만나서 생기는 곡선을 미분한 것과 같으며, 마찬가지로 편미분 $\partial f / \partial x_2$은 비선형 곡면이 $x_2 - y$ 면과 만나서 생기는 곡선을

미분한 것과 같다. 따라서, 비선형 함수를 x_1과 x_2에 대해서 편미분 하면, 선형화의 중심점에서 곡면에 접하는 평면의 x_1축 방향의 기울기 K_1과, x_2축 방향의 기울기 K_2를 구할 수 있고, 이를 이용하여 다음 식과 같이 변화 량의 근사값 Δy값을 구할 수 있다.

$$\Delta y = K_1 \cdot \Delta x_1 + K_2 \cdot \Delta x_2 = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} \tag{0.10}$$

위의 선형화 방법은 3개 이상의 변수를 갖는 비선형 함수에 대해서도 확대 적용할 수 있다. 이 방법을 다음과 같은 상태 변수 방정식으로 표시되는 비선형 시스템의 선형화에 적용해 본다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u\right) \\ f_2\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u\right) \end{bmatrix} \tag{0.11}$$

위의 시스템에 대한 선형화의 중심점은 $\left(x_{10}, x_{20}, \cdots, u_0\right)$이며, 이 중심점에서 다음의 관계식이 만족 된다고 가정한다.

$$\dot{x}_{i0} = f_i\left(x_{10}, x_{20}, \cdots, u_0\right),\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{0.12}$$

그리고,

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i0} + \Delta x_i,\ i = 1, 2, \cdots n \\ u &= u_0 + \Delta u \end{aligned} \tag{0.13}$$

이라면, 근사식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = \dot{x}_{i0} + \Delta \dot{x}_i &= f_i\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u\right) \\ &\approx f_i\left(x_{10}, x_{20}, \cdots, u_0\right) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right|_{x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \cdots, x_n = x_{n0}, u = u_0} \cdot \Delta x_1 \\ &\qquad + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right|_{x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \cdots, x_n = x_{n0}, u = u_0} \cdot \Delta x_2 \\ &\qquad \vdots \\ &\qquad + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right|_{x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \cdots, x_n = x_{n0}, u = u_0} \cdot \Delta x_n,\ i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{0.14}$$

위의 식으로부터 다음과 같은 선형 상태 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \\ \vdots \\ \Delta\dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Delta u \tag{0.15}$$

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_1=x_{10},x_2=x_{20},\cdots,x_n=x_{n0},u=u_0}, b_i = \left.\frac{\partial f_i}{\partial u}\right|_{x_1=x_{10},x_2=x_{20},\cdots,x_n=x_{n0},u=u_0} \tag{0.16}$$

아래에서는 위의 식들을 이용하여 비선형 시스템을 선형화 하는 예제들을 보여준다.

예제 3.9

그림 3.12와 같이 무게가 없고 길이가 L 인 막대의 끝에 무게가 M 인 추가 달려있는 진자(pendulum)를 고려한다. 막대의 무게는 없다고 가정한다.

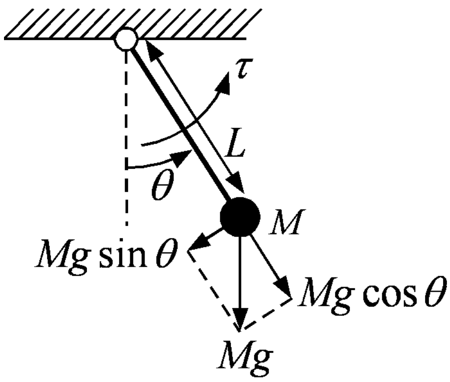

그림 3.12 진자(pendulum)

이 진자는 외부 입력 토크 τ 에 의해서 움직이고 있다. 이 시스템을 평형 점을 중심으로 선형화 하여 선형 상태 방정식과 전달 함수를 구한다. 중력 가속도를 g 라고 할 때, 중력이 추에 미치는 힘은 Mg 이며, 이중 회전 원호의 접선 방향의 힘 성분은 $Mg\sin\theta$ 이다. 따라서 회전 추에 가해지는 토크의 합은 $\tau - LMg\sin\theta$ 이며, 이를 이용하여 뉴턴의 운동 법칙을 적용하면 다음 식과 같다.

$$\tau - LMg\sin\theta = ML^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{0.17}$$

이 시스템의 상태 방정식을 구하기 위해 다음과 같이 변수를 정의한다.

$$x_1 = \theta,\ x_2 = \dot{\theta},\ u = \tau \tag{0.18}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L}\sin x_1 + \frac{1}{ML^2}u \end{bmatrix} \tag{0.19}$$

선형화를 하기 위한 중심점을 $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ u = 0$ 으로 정하면, 이 점에서 평형 상태임을 쉽게 알 수 있다. 평형 점에서 선형화된 상태 변수 방정식의 시스템 매트릭스는 다음 식들에서 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=0,x_2=0,u=0} &= 0, \\ \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x_1=0,x_2=0,u=0} &= 1, \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x_1=0,x_2=0,u=0} &= -\frac{g}{L}\cos x_1\Big|_{x_1=0,x_2=0,u=0} = -\frac{g}{L}, \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x_1=0,x_2=0,u=0} &= 0 \end{aligned} \tag{0.20}$$

또한 입력 매트릭스는 다음 식들에서 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{x_1=0,x_2=0,u=0} &= 0, \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{x_1=0,x_2=0,u=0} &= \frac{1}{ML} \end{aligned} \tag{0.21}$$

위의 결과들로부터 평형 점에서 선형화된 상태 변수 방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ML^2} \end{bmatrix} \Delta u \tag{0.22}$$

전달 함수를 구하기 위해서 위의 식에 라플라스 변환을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s\Delta X_1(s) &= \Delta X_2(s) \\ s\Delta X_2(s) &= -\frac{g}{L}\Delta X_1(s) + \frac{1}{ML^2}\Delta U(s) \end{aligned} \tag{0.23}$$

위의 식으로부터 다음과 같은 전달 함수를 구할 수 있다.

$$\frac{\Delta X_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1}{ML^2}\frac{1}{s^2 + (g/L)} \tag{0.24}$$

■

예제 3.10

그림 3.13 과 같은 자기 부상 장치(magnetic levitation system)를 고려한다.

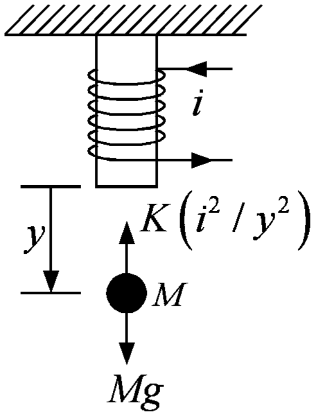

그림 3.13 자기 부상 장치(magnetic levitation system)

자기 부상 장치는 전자석에 전류를 흘려 주어 쇠구슬을 공간에 띄우는 실험 장치이다. 이 시스템의 입력은 전자석에 흘려 주는 전류 i 이며, 출력은 전자석으로부터 쇠구슬까지의 거리 y 이다. 전자석이 쇠구슬을 당기는 힘은 전류의 제곱에 비례하고 거리의 제곱에 반비례한다. 또한 쇠구슬에는 중력에 의한 힘이 작용하므로, 뉴턴의 운동 법칙을 적용하면 다음과 같은 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$Mg - K\frac{i^2}{y^2} = M\frac{d^2 y}{dt^2} \tag{0.25}$$

위의 식에서 M 은 쇠구슬의 질량이며, g 는 중력 가속도, 그리고 K 는 비례 상수이다. 이 시스템의 상태 변수 방정식을 구하기 위하여 다음과 같이 상태 변수와 입력 변수를 정의한다.

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ u &= i \end{aligned} \tag{0.26}$$

위의 상태 변수 정의를 이용하여 다음과 같은 상태 변수 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\left(x_1, x_2, u\right) \\ f_2\left(x_1, x_2, u\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \dfrac{K}{M}\dfrac{u^2}{x_1^2} \end{bmatrix} \tag{0.27}$$

쇠구슬이 $y = Y_0$ 의 위치에서 평형 상태에 있다고 가정하고, 이때 흐르는 전류는 $i = I_0$ 라고 가정한다. 평형인 상태에서 쇠구슬은 정지해 있으므로, $\dot{x}_2 = 0$ 의 조건으로부터 다음과 같은 관계식이 성립함을 알 수 있다.

$$K = \frac{gMY_0^2}{I_0^2} \tag{0.28}$$

또한 평형 점에서의 상태 변수와 입력은 다음의 값들을 가진다.

$$x_1 = Y_0,\ x_2 = 0,\ u = I_0 \tag{0.29}$$

평형 점에서의 선형화된 상태 변수방정식의 시스템 매트릭스는 다음 식과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=Y_0,x_2=0,u=I_0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x_1=Y_0,x_2=0,u=I_0} &= 1, \\
\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x_1=Y_0,x_2=0,u=I_0} &= \frac{2K}{M}\left.\frac{u^2}{x_1^3}\right|_{x_1=Y_0,x_2=0,u=I_0} = \frac{2g}{Y_0}, \\
\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x_1=Y_0,x_2=0,u=I_0} &= 0
\end{aligned} \tag{0.30}$$

또한 입력 매트릭스는 다음 식들에서 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{x_1=Y_0,x_2=0,u=I_0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{x_1=Y_0,x_2=0,u=I_0} &= -\frac{2K}{M}\left.\frac{u}{x_1^2}\right|_{x_1=Y_0,x_2=0,u=I_0} = -\frac{2g}{I_0}
\end{aligned} \tag{0.31}$$

위의 결과들로부터 평형 점에서 선형화된 상태 변수 방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2g}{Y_0} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{2g}{I_0} \end{bmatrix}\Delta u \tag{0.32}$$

전달 함수를 구하기 위해서 위의 식에 라플라스 변환을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
s\Delta X_1(s) &= \Delta X_2(s) \\
s\Delta X_2(s) &= \frac{2g}{Y_0}\Delta X_1(s) - \frac{2g}{I_0}\Delta U(s)
\end{aligned} \tag{0.33}$$

위의 식으로부터 다음과 같은 전달 함수를 구할 수 있다.

$$\frac{\Delta X_1(s)}{\Delta U(s)} = -\frac{2g}{I_0}\frac{1}{s^2 - (2g/Y_0)} \tag{0.34}$$

■